Über den grössten gemeinschaftlichen Divisor.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Reihe von arithmetischen Theoremen mittheilen, welche sich auf den grössten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen beziehen. Bezeichnet man den grössten gemeinschaftlichen Theiler der zwei ganzen Zahlen m und n mit $[m, n]$, so ergeben sich aus Formeln, welche ich früher angegeben habe, folgende Gleichungen:

$$1)\quad \sum_{x=1}^{x=n} P_{\varkappa,\tau}([n,x]) = n P_{\varkappa-1,\tau}(n)$$

$$2)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x])\varphi([n,x]) = 0,$$

wenn n kein Quadrat ist,

$$3)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x])\varphi([n,x]) = \varphi_2(\sqrt{n}),$$

wenn n ein Quadrat ist,

$$4)\quad \sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\varphi_\varkappa([n,x]) = \varphi_{\varkappa+1}(n)$$

$$5)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \mu_r([n,x]) = \sum_{d_r} d_r \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)$$

$$6)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x]) = \sum_{d} d\lambda\left(\frac{n}{d}\right)\omega\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$7)\quad \sum_{x=1}^{x=n} f_\beta([n,x]) = \sum_d d f_{\beta-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$8)\quad \sum_{x=1}^{x=n} f_\beta([n,x]) = \sum_d \psi_1(d) f_{\beta-2}\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$9)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \omega_\varkappa([n,x]) = \sum_{d_2} \psi_{\varkappa-1}(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{n}{d_2}}\right)$$

$$10)\quad \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\bar{\omega}([n,x])}\pi([n,x])\,\omega_1([n,x]) = n\,\omega(n)$$

$$11)\quad \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\bar{\omega}([n,x])}\lambda([n,x])\,\pi([n,x])\,\omega_1([n,x]) = \lambda(n)\,\omega(n)$$

$$12)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \chi_{1,\mu}(\Delta,[n,x]) = \chi_{0,\mu}(\Delta,n)$$

$$13)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,\mu}(\Delta,[n,x])\,\lambda([n,x]) = \lambda(n)\,\psi_{0,\mu}(\Delta,n)$$

$$14)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,\mu}(\Delta,[n,x])\,\lambda([n,x]) = \lambda(n)\sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^\mu \mu^2\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$15)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta,[n,x]) = \tau n \sum_d \frac{\left(\frac{\Delta}{d}\right)}{d}$$

$$16)\quad \sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\mu([n,x]) = \mu(n)$$

$$17)\quad \sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\lambda([n,x]) = n\sum_{d_2} \frac{\mu(d_2)}{d_2}$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

18) $\sum_{x=1}^{x=n} P_{0,\tau}([n,x]) = \rho_{0,\tau}(n)$

19) $\sum_{x=1}^{x=n} \psi_\varkappa([n,x]) = n\,\psi_{\varkappa-1}(n)$

20) $\sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\varphi([n,x]) = \varphi_2(n)$

21) $\sum_{x=1}^{x=n} \omega([n,x]) = \sum_{d_2} \psi_1(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{n}{d_2}}\right)$

22) $\lambda(n) \sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,0}(\Delta,[n,x])\,\lambda([n,x]) = \psi_{0,0}(\Delta,n)$

23) $\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,0}(\Delta,[n,x])\,\lambda([n,x]) = \lambda(n) \sum_{d} \left(\frac{\Delta}{d}\right) \mu^2\left(\frac{n}{d}\right).$

Die Formel 19) hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt; die Formel 22) liefert eine neue Darstellung der Anzahl der Lösungen der Congruenz:

$$x^2 \equiv \Delta (\mathrm{mod.}\, n).$$

Von den in den angegebenen Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden hervorgehoben werden:

Die Anzahl derjenigen gemeinsamen Divisoren der ganzen Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, ist gleich der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor eine τ^{te} Potenz ist.

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Theiler der ganzen Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, ist das n-fache der Summe der $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren von n, welche τ^{te} Potenzen sind.

Unter den grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ganzen Zahl n und aller dieselbe nicht übertreffenden Zahlen gibt es eben so viele, welche durch keine r^{te} Potenz theilbar sind, als die

Summe jener Divisoren der Zahl n, deren complementärer Divisor die r^{te} Potenz eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen ist, die Summe aus der Anzahl der zu n relativ primen, diese Grösse nicht übersteigenden Zahlen und der Summe der übrigen Theiler von n, deren complimentärer Divisor eine r^{te} Potenz aber durch keine $2r^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, übertrifft.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft in β Factoren zerlegen, als die Summe der Producte beträgt, welche man erhält, wenn man jeden Theiler von n mit der Anzahl der Zerlegungen seines complementären Divisors in $\beta-1$ Factoren multiplicirt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft in β Factoren zerlegen, als die Summe der Producte beträgt, welche man erhält, wenn man die Summe der Divisoren jedes Theilers von n mit der Anzahl der Zerlegungen seines complementären Divisors in $\beta-2$ Factoren multiplicirt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als die Summe der Divisoren derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor ein Quadrat eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen ist, die Summe der Divisoren der übrigen Theiler von n, deren complementärer Divisor ein Quadrat, aber durch keine vierte Potenz theilbar ist, übertrifft.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ darstellen, als das Product aus der Anzahl der Darstellungen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und dem Überschusse der Summe derjenigen Divisoren von n, für deren complementären Divisor d' das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ den Werth $+1$ besitzt, über die Summe der übrigen Theiler mit zu Δ theilerfremdem complementären Divisor beträgt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ungeraden oder einfachgeraden Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich viermal so oft durch die quadratische Form x^2+y^2 darstellen, als der Überschuss der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor die Form $4s+1$ hat, über die Summe der übrigen Theiler mit ungeradem complementären Divisor beträgt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ungeraden Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich doppelt so oft durch die quadratische Form x^2+2y^2 darstellen, als der Überschuss der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor eine der Formen $8s+1$, $8s+3$ hat, über die Summe der übrigen Divisoren beträgt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ungeraden durch 3 nicht theilbaren Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich doppelt so oft durch die quadratische Form x^2+3y^2 darstellen, als der Überschuss der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor die Form $3s+1$ besitzt, über die Summe der übrigen Divisoren beträgt.

Die Summe derjenigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, ist um eine Einheit grösser oder kleiner als die Summe der übrigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren ohne quadratischen Theiler, je nachdem n aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist; die zwei angeführten Summen sind einander gleich, wenn die Zahl n einen quadratischen Divisor besitzt.

Die Summe derjenigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt sind, übertrifft die Summe der übrigen um eben so viel, als die Summe derjenigen quadratischen Theiler von n, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, die Summe der übrigen quadratischen Theiler mit complementärem Divisor ohne quadratischen Factor übersteigt.

Aus den Gleichungen 1), 2), 10), 19) und 20) ergeben sich leicht die folgenden Relationen:

$$24)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} P_{-\varkappa,\tau}([n,x])}{n} = \zeta(\tau(\varkappa+2))$$

$$25)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{\varkappa}([n,x])}{n^{\varkappa}} = \zeta(\varkappa) \qquad (\varkappa>1)$$

$$26)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x])\,\varphi([n,x])}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\zeta(3)}$$

$$27)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\varphi([n,x])}{n^{3}} = \frac{1}{\zeta(3)}$$

$$28)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} (-1)^{\bar{\omega}([n,x])}\,\pi([n,x])\,\omega_1([n,x])}{n} = \frac{6}{\pi^2}\log n.$$

Von den speciellen Relationen, welche in diesen Gleichungen enthalten sind, mögen die folgenden angeführt werden:

$$29)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} P_{-2\nu,\tau}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau(\nu+1)}\,B_{\tau(\nu+1)}}{2\Gamma(2\tau\nu+2\tau+1)},$$

$$30)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} P_{-\varkappa,2\tau}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau(\varkappa+2)}\,B_{\tau(\varkappa+2)}}{2\Gamma(2\tau\varkappa+4\tau+1)},$$

$$31)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} P_{0,\tau}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau}\,B_{\tau}}{2\Gamma(2\tau+1)},$$

$$32)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{-\varkappa}([n,x])}{n} = \zeta(\varkappa+2),$$

$$33)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{-2r}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2r+2} B_{r+1}}{2\Gamma(2r+3)},$$

$$34)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{2r}([n,x])}{n^{2r}} = \frac{(2\pi)^{2r} B_{r}}{2\Gamma(2r+1)},$$

$$35)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi_{2r+1}([n,x])}{n^{2r+1}} = \zeta(2r+1) \qquad (r>0),$$

$$36)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} \psi([n,x])}{n} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Von den in den angegebenen Formeln enthaltenen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel:

$$1 + \frac{1}{2^{\tau(\varkappa+2)}} + \frac{1}{3^{\tau(\varkappa+2)}} + \frac{1}{4^{\tau(\varkappa+2)}} + \cdot$$

Die Summe der reciproken $(2r)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2\tau(r+1)} B_{\tau(r+1)}}{2\Gamma(2\tau r + 2\tau + 1)}.$$

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen, welche $(2\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2\tau(\varkappa+2)} B_{\tau(\varkappa+2)}}{2\Gamma(2\tau\varkappa + 4\tau + 1)}.$$

Die Summe der reciproken Quadrate der gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^4}{90}$.

Die Summe der reciproken Biquadrate der gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^6}{945}$.

Die Summe der reciproken quadratischen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^6}{945}$.

Die Summe der reciproken Quadrate der quadratischen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^8}{1350}$.

Die Summe der reciproken Cuben der quadratischen gemeinschaftlichen Divisoren von zwei ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^{10}}{62370}$.

Die Summe der reciproken biquadratischen gemeinschaftlichen Divisoren von zwei ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{691\,\pi^{12}}{605752875}$.

Die Summe der reciproken Quadrate der biquadratischen gemeinschaftlichen Divisoren von zwei ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{3617\,\pi^{16}}{36182396250}$.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{(2\pi)^{2\tau} B_\tau}{2\Gamma(2\tau+1)}$ gemeinschaftliche Divisoren, welche τ^{te} Potenzen sind.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{\pi^2}{6}$ gemeinschaftliche Divisoren.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{\pi^4}{90}$ quadratische gemeinschaftliche Divisoren.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{\pi^6}{945}$ cubische gemeinschaftliche Divisoren.

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der gemeinschaftlichen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n und der Zahl n beträgt für sehr grosse n:

$$n^{\varkappa}\left(1+\frac{1}{2^{\varkappa}}+\frac{1}{3^{\varkappa}}+\frac{1}{4^{\varkappa}}+\quad\right)\qquad(\varkappa>1).$$

Die Summe der $(2r)^{\text{ten}}$ Potenzen der gemeinschaftlichen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n und der Zahl n ist für sehr grosse n $\frac{(2\pi)^{2r}B_r}{2\Gamma(2r+1)}$—mal grösser, als die $2r^{\text{te}}$ Potenz der Zahl n.

Die Summe der Quadrate der gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen ist für sehr grosse n $\frac{\pi^4}{90}$—mal so gross, als n^2.

Die Summe der Biquadrate der gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übertreffenden Zahlen ist für sehr grosse n das $\frac{\pi^{6}}{945}$—fache von n^4.

Die Formeln 32) und 36) hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Herr Smith hat bekanntlich folgende Gleichung aufgestellt.

$$37)\quad |[x,y]|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}=\prod_{x=1}^{n}\varphi(x).$$

Ich will nun schliesslich noch die Werthe einer Reihe von analogen symmetrischen Determinanten angeben. Man findet:

$$38)\quad |[x,y]^{\varkappa}|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}=\prod_{x=1}^{n}\varphi_{\varkappa}(x)$$

$$39)\quad |\psi_{\varkappa}([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}=(n!)^{\varkappa}$$

$$40)\quad |f_{\beta}([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}=\prod_{x=1}^{n}f_{\beta-1}(x)$$

$$41)\quad |\lambda([x,y])f_{\beta}[x,y]^{\prime}|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}=\prod_{x}^{n}\frac{\lambda(x)f_{\beta-1}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-2}(x))}{(\beta-1)^{\omega(x)}}$$

42) $$\left|\frac{f_{\beta-1}([x,y])\psi([x,y]^2\pi^{\beta-2}([x,y]))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}([x,y])}}\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n} {}_{x} \frac{f_{\beta-2}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(x)}}$$

43) $$\left|\frac{(-1)^{(\varkappa+1)\bar{\omega}([x,y])}\pi^{\varkappa}([x,y])\varphi_{\varkappa}([x,y])}{[x,y]^{\varkappa}}\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = (n!)^{\varkappa}\prod_{1}^{n} {}_{x}\, \mu(x)$$

44) $$\left|\left(\frac{\Delta}{[x,y]}\right)[x,y]^{\mu-\varkappa}\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n} {}_{x} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,x)}{x^{\varkappa}}$$

45) $$|P_{-\varkappa,\tau}([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = {\prod_{1}^{n}}' {}_{x} \frac{1}{x^{\varkappa}},$$

wo die Marke am Productzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, welche τ^{te} Potenzen sind.

46) $$|\varphi(\Delta,[x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \tau^{n}\prod_{1}^{n} {}_{x} \left(\frac{\Delta}{x}\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser Gleichungen mögen folgende besonders angeführt werden:

47) $$|\rho_{0,\tau}([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 1$$

48) $$|\psi([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 1$$

49) $$|\lambda([x,y])\psi([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n} {}_{x}\, \lambda(x)\psi(x^2)$$

50) $$|\lambda([x,y])f_3([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n} {}_{x}\, \lambda(x)\psi^2(x)$$

51) $$|\lambda([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n} {}_{x}\, \omega(x)\lambda(x)$$

52) $$|\psi^2([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1} {}_{x}\, \psi(x^2)$$

53) $\left|\left(\frac{\Delta}{[x,y]}\right)\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n}{}_{x} \frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}}$

54) $|\omega([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 0$

für $n \gtreqless 4$, und:

55) $|\omega([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 1$

für $n < 4$; welche Formel übrigens selbstverständlich ist. Es mag noch erwähnt werden, dass, wie ich demnächst zu zeigen gedenke, auch die allgemeine Determinante

$$|f([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}$$

sich als ein Product von n Factoren darstellen lässt.